Über reguläre Mannigfaltigkeiten

Von E. T. SCHMIDT in Budapest

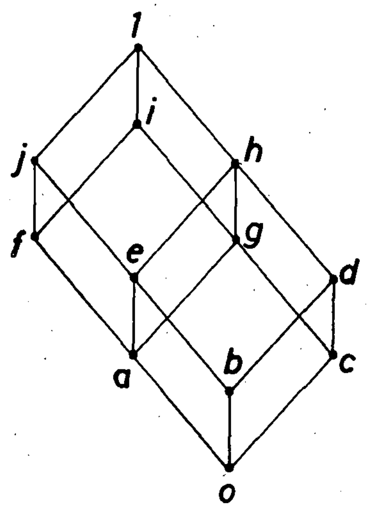
Professor L. Rédei zu seinem 70. Geburtstag

1. Eine universelle Algebra $\mathfrak{A}$ heißt regulär[1]), falls verschiedene Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ keine gemeinsame Kongruenzklassen besitzen. Dementsprechend wollen wir eine Manningfaltigkeit (primitive Klasse) $\mathscr{K}$ regulär nennen, wenn jede Algebra $\mathfrak{A}$ aus $\mathscr{K}$ regulär ist. Die Algebra $\mathfrak{A}$ wird normal[1]) genannt, wenn je zwei Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind. Eine Mannigfaltigkeit deren Elemente normale Algebren sind, heißt ebenfalls normal. In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz. *Es existiert eine reguläre, nicht normale Mannigfaltigkeit.*[2])

2. Zum Beweis dieses Satzes werden wir zuerst eine reguläre, aber nicht normale universelle Algebra $\mathfrak{A}=(A; F)$ konstruieren.

Betrachten wir zuerst den Verband L, der mit dem folgenden Diagramm definiert ist:



[1]) Dieser Begriff wurde von A. I. MALCEV eingeführt [1].
[2]) Dieser Satz beantwortet ein von THURSTON gestelltes Problem [2].

L ist das direkte Produkt des Booleschen Verbandes 2^2 mit einer dreielementigen Kette. Das Hauptideal $(h]$ von L ist ein Boolescher Verband, d.h. jedes Element $u\,(\leqq h)$ hat ein Komplement u' in $(h]$. Ähnlicherweise bildet das duale Hauptideal $[a)$ einen Booleschen Verband, wo wir das Komplement von z $(z \geqq a)$ mit z^* bezeichnen werden.

Wir definieren die Algebra $\mathfrak{A}=(A;\,F)$. Die Trägermenge A soll mit der Trägermenge des Verbandes L übereinstimmen. Die Elemente von F, d.h. die Operationen von $\mathfrak{A}$ seien die folgenden:

1° Die Vereinigungsoperation $\cup$ von L;

2°. Die Durchschnittsoperation $\cap$ von L;
Die unären Operationen $\mu_1, \dots, \varrho_2$, ω_u $(u \in A)$ definiert durch:

3°. $\mu_1(x)=(x\cap h)'$

4°. $\mu_2(x)=(x\cup a)^*$;

3°′. $$\nu_1(x) = \begin{cases} x\cup j, & \text{wenn} \quad x \geqq f, \\ x & \text{sonst}; \end{cases}$$

4°′. $$\nu_2(x) = \begin{cases} x\cup f, & \text{wenn} \quad x \geqq b, \\ x\cup a & \text{sonst}; \end{cases}$$

5°. $$\varrho_1(x) = \begin{cases} x\cap b, & \text{wenn} \quad x \leqq d, \\ x & \text{sonst}; \end{cases}$$

6°. $$\varrho_2(x) = \begin{cases} x\cap d, & \text{wenn} \quad x \leqq j, \\ x\cap h & \text{sonst}; \end{cases}$$

7°. $\omega_u(x)=u$.

3. Wir werden zeigen, daß die Algebra $\mathfrak{A}$ regulär und nicht normal ist. Dazu benötigen wir eine Übersicht über die Kongruenzen von $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ hat zwei nichttriviale Kongruenzen Θ und Φ. Die Θ-Klassen sind die folgenden:

$$\{1, i, h, g\}, \ \{j, f, e, a\}, \ \{d, c\} \quad \text{und} \quad \{b, 0\}.$$

Die Φ-Klassen sind:

$$\{1, j\}, \ \{i, f\}, \ \{h, e, b, d\} \quad \text{und} \quad \{g, a, 0, c\}.$$

Dass Θ und Φ Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ sind, zeigt eine triviale Rechnung. Wir müssen noch zeigen, daß $\mathfrak{A}$ keine andere nichttriviale Kongruenz besitzt. $\mathfrak{A}$ bildet aber bezüglich der Operationen $\cap$ und $\cup$ den Verband L, und in einem beliebigen endlichen Verband ist jede Kongruenz die Vereinigung minimaler Kongruenzen

$\Theta_{x,y}$, wo x und y Nachbarelemente sind. Berücksichtigen wir noch, daß $(h]$ bzw. $[a)$ Boolesche Verbände sind, so müssen wir nur die folgenden minimalen Kongruenzen untersuchen:

$$\Theta_{a,f},\ \Theta_{a,e},\ \Theta_{a,g} \quad \text{und} \quad \Theta_{h,d}.$$

Aus $a \equiv f(\Theta_{a,f})$ folgt $a = v_1(a) \equiv v_1(f) = f \cup j = j(\Theta_{a,f})$, d.h. es gilt $\Theta = \Theta_{a,f}$. Ähnlicherweise folgt aus $a \equiv e(\Theta_{a,e})$ $a = v_2(a) \equiv v_2(e) = j$, und so muß $\Theta_{a,e}$ mit Θ übereinstimmen.

Aus $a \equiv g(\Theta_{a,g})$ ergibt sich $e = e \cup a \equiv e \cup g = h(\Theta_{a,g})$ und so $b = \varrho_2(e) \equiv \varrho_2(h) = h(\Theta_{a,g})$, d.h. $\Theta_{a,g} = \Phi$. Schließlich aus $h \equiv d(\Theta_{h,d})$ folgt $h = \varrho_1(h) \equiv \varrho_1(d) = b(\Theta_{h,d})$, d.h. es gilt $\Phi = \Theta_{h,d}$.

Da Θ und Φ keine gemeinsame Kongruenzklasse besitzen, und alle vorkommenden Kongruenzklassen mehr als einelementig sind, ist $\mathfrak{A}$ offenbar regulär. Es gilt $0 \equiv a(\Phi)$ und $a \equiv f(\Theta)$, aber für kein $u \in A$ ist $0 \equiv u(\Theta)$ und $u \equiv f(\Phi)$ richtig, d.h. $\mathfrak{A}$ kann nicht normal sein.

4. Es sei $\mathscr{K}$ die durch $\mathfrak{A}$ erzeugte Mannigfaltigkeit. Wir werden zeigen, daß diese Mannigfaltigkeit unserem Satz entspricht. Da $\mathfrak{A}$ nicht normal ist, muß dasselbe auch für $\mathscr{K}$ gelten.

Es sei $\mathscr{M}$ eine beliebige abstrakte Klasse ähnlicher Algebren. $H\mathscr{M}$ soll die Klasse sämtlicher homomorpher Bilder, $S\mathscr{M}$ die Klasse aller Unteralgebren der Algebren aus $\mathscr{M}$ bezeichnen. $P\mathscr{M}$ ist die Klasse aller Algebren, die als direktes Produkt von Algebren aus $\mathscr{M}$ entstehen. Es ist bekannt, daß die durch $\mathscr{A}$ erzeugte Mannigfaltigkeit sich in der Form

$$\mathscr{K} = HSP(\mathfrak{A})$$

darstellen läßt.

Das homomorphe Bild einer regulären Algebra ist wieder regulär, und so — um die Regularität von $\mathscr{K}$ zu zeigen — müssen wir nur die Regularität der Elemente von $SP(\mathfrak{A})$ beweisen. Es sei nun $\mathscr{B}$ aus $SP(\mathfrak{A})$. $\mathscr{B}$ ist dann eine Unteralgebra eines direkten Produktes, d.h. die Elemente von $\mathscr{B}$ lassen sich in der Form $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ schreiben, wo $a_\alpha \in A$ gilt. Wenn für jedes $\alpha \in I$ alle a_α mit demselben Element $u \in A$ übereinstimmen, so bezeichnen wir $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ auch mit (u) und werden es ein Diagonalelement nennen.

Es sei $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathscr{B}$. Nach Anwendung von $\omega_u(x)$ bekommt man $(u) = \omega_u((a_\alpha)) = (\omega_u(a_\alpha)) \in \mathscr{B}$, d.h. die Diagonalelemente sind alle in $\mathscr{B}$ enthalten.

Wir wollen die Kongruenzen von $\mathscr{B}$ untersuchen. Dazu brauchen wir zuerst das folgende

Lemma. *Sind $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ und $(y_\alpha)_{\alpha \in I}$ Elemente von $\mathscr{B}$, so daß $x_\alpha \cong y_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$ gilt, und ist Θ eine Kongruenz von $\mathscr{B}$, so folgt aus den Kongruenzen $(x_\alpha) \cap (h) \equiv (y_\alpha) \cap (h)$ (Θ) und $(x_\alpha) \cup (a) \equiv (y_\alpha) \cup (a)$ (Θ) die Kongruenz $(x_\alpha) \equiv (y_\alpha)$ (Θ).*

Beweis. Ist $(x_\alpha)\cup(a)\equiv(y_\alpha)\cup(a)$ (Θ), so bilden wir den Durchschnitt beider Seiten mit (x_α): $(x_\alpha)=(x_\alpha)\cap[(x_\alpha)\cup(a)]\equiv(x_\alpha)\cap[(y_\alpha)\cup(a)]=(x_\alpha^0)$ (Θ). Ähnlicherweise erhalten wir $(y_\alpha)=(y_\alpha)\cup[(y_\alpha)\cap(h)]\equiv(y_\alpha)\cup[(x_\alpha)\cap(h)]=(x_\alpha)\cap[(y_\alpha)\cup(h)]=$ $=(y_\alpha^0)$ (Θ). (Da haben wir die Distributivität des Verbandes L benutzt.) Wegen $h>a$ gilt $(x_\alpha)\geqq(y_\alpha^0)\geqq(x_\alpha^0)\geqq(y_\alpha)$ und so mit Hilfe der Transitivität von Θ erhalten wir $(x_\alpha)\equiv(y_\alpha)$ (Θ). Damit ist das Lemma bewiesen.

Bezüglich der Operationen $\cup$ und $\cap$ bildet $\mathscr{B}$ einen Verband, und so können wir die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$B_1=[(a))=\{(x_\alpha);\ (x_\alpha)\in\mathscr{B},\ x_\alpha\geqq a \quad \text{für jedes } \alpha\},$$

$$B_2=((h)]=\{(x_\alpha);\ (x_\alpha)\in\mathscr{B},\ x_\alpha\leqq h \quad \text{für jedes } \alpha\},$$

$$C=B_1\wedge B_2 \quad \text{(mengentheoretischer Durchschnitt).}$$

Es seien weiter $\mathscr{B}_1=(B_1;\ \cup,\ \cap)$, $\mathscr{B}_2=(B_2;\ \cup,\ \cap)$ und $\mathscr{C}=(C;\ \cup,\ \cap)$. Da die Unteralgebra $\mathscr{B}$ in bezug auf μ_1 und μ_2 abgeschlossen ist, sind $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ und $\mathscr{C}$ Boolesche Verbände. Wir werden zunächst zeigen, daß die Kongruenzen von $\mathscr{B}_1$ (bzw. $\mathscr{B}_2$) durch die Kongruenzen von $\mathscr{C}$ eindeutig bestimmt sind.

Jede minimale Kongruenz von $\mathscr{B}_1$ läßt sich in der Form $\Theta_{(a),(x_\alpha)}$ schreiben. Ist Θ eine beliebige Kongruenz von $\mathscr{B}_1$ mit $(a)\equiv(x_\alpha)$ (Θ) so folgt $(a)=\nu_1((a))\equiv$ $\equiv\nu_1((x_\alpha))$ (Θ), und damit $(a)=(a)\cap(h)\equiv\nu_1((x_\alpha))\cap(h)=(\tilde{x}_\alpha)$ (Θ). Es gilt dann $(\tilde{x}_\alpha)\in C$. Gilt $(a)\equiv(\tilde{x}_\alpha)$ (Θ), so bekommen wir nach einer Anwendung der Operation ν_2

$$(a)=\nu_2((a))\equiv\nu_2((\tilde{x}_\alpha))\ (\Theta).$$

Ist $x_\alpha\leqq h$ für ein α, so gilt $\nu_1(x_\alpha)=x_\alpha$, d.h. $\nu_2(\tilde{x}_\alpha)\geqq x_\alpha$. Wenn $x_\alpha\not\leqq h$ ist, so können wir $\nu_2(\tilde{x}_\alpha)=\nu_2(\nu_1(x_\alpha)\cap h)=\nu_2((x_\alpha\cup j)\cap h)=\nu_2((x_\alpha\cap h)\cup e)=(x_\alpha\cap h)\cup e\cup f=$ $=x_\alpha\cup j\geqq x_\alpha$ feststellen, d.h. es gilt $\nu_2((\tilde{x}_\alpha))\geqq(x_\alpha)$, d.h. es muß auch $(a)=(a)\cap$ $\cap(x_\alpha)\equiv\nu_2((\tilde{x}_\alpha))\cap(x_\alpha)=(x_\alpha)$ (Θ) gelten.

Für eine beliebige Kongruenz Θ von $\mathscr{B}$ und $x\in B$ bezeichne $[x]\Theta$ die x enthaltende Θ-Klasse. Die Regularität von $\mathscr{B}$ bedeutet, daß für je zwei Kongruenzen Θ_1, Θ_2 von $\mathscr{B}$ mit $\Theta_1<\Theta_2$ stets $[x]\Theta_1\subset[x]\Theta_2$ gilt.

Wenn Θ_1, Θ_2 Kongruenzen von $\mathscr{B}$ sind und $\Theta_1<\Theta_2$ gilt, so existiert bestimmt ein x mit $[x]\Theta_1\subset[x]\Theta_2$. Wegen des Lemmas können wir dann annehmen, daß $x\in B_1\vee B_2$ (mengentheoretische Vereinigung) gilt. $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ sind aber Boolesche Algebren und ihre Kongruenzen sind durch die Kongruenzen von $\mathscr{C}$ eindeutig bestimmt, d.h. es muß dann für jedes $y\in B_1\vee B_2$ $[y]\Theta_1\subset[y]\Theta_2$ gelten.

Es sei schließlich $y\notin B_1\vee B_2$. Wir müssen noch $[y]\Theta_1\subset[y]\Theta_2$ zeigen. Bezeichne y^* das Element $[y\cup(a)]\cap(h)=[y\cap(h)]\cup(a)$. Offensichtlich gilt $y^*\in C$. Jede Kongruenz Φ von $\mathscr{C}$ induziert auf dem Ideal $(y^*]$ eine Kongruenz Φ' und auf dem dualen

Hauptideal $[y)$ eine Kongruenz Φ''. Φ ist dann durch das Paar (Φ', Φ'') eindeutig bestimmt. Da Θ_1 und Θ_2 verschiedene Kongruenzen von $\mathscr{B}$ sind, muß entweder $\Theta_1' \neq \Theta_2'$ oder $\Theta_1'' \neq \Theta_2''$ sein. Nehmen wir an, daß z.B. $\Theta_1' < \Theta_2'$ gilt. Das Intervall $[(a), y \cup (a)]$ enthält $(y^*]$ und so sind auch die das Element $y \cup (a)$ enthaltenden Kongruenzklassen verschieden. $[(a), y \cup (a)]$ und $[y \cap (a), y]$ sind aber transponiert, d.h. es muß $[y]\Theta_1 \neq [y]\Theta_2$ gelten. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] А. И. Мальцев, К общей теории алгебраических систем, *Мат. Сборник,* **35 (77)** (1954), 3—20.

[2] H. A. Thurston, Derived operations and congruences, *Proc. London Math. Soc.,* **8** (1958), 127—134.

(Eingegangen am 15. Oktober 1969)